

OLIMPIADA LOCALĂ DE MATEMATICĂ

13 februarie 2010

CLASA A IX –A MATE-INFO

1.a) Să se demonstreze că $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \leq \frac{S_n}{a_1 a_n}$ unde a_1, a_2, \dots, a_n sunt numere pozitive în progresie aritmetică iar S_n este suma lor.

b) Demonstrați că pentru orice număr natural $n, n \geq 1$, există o reprezentare de forma $n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \dots \pm k^2, k \in \mathbb{N}^*$.

2 a) .Fie ecuațiile $x^2 + 2ax + b = 0, x^2 + 2bx + c = 0, x^2 + 2cx + a = 0, a, b, c \in \mathbb{R}$. Arătați că cel puțin una dintre ele are rădăcinile reale.

b) O mulțime are 2010 vectori cu lungimi ce formează mulțimea $\{1, 2, 3, \dots, 2010\}$ și au direcțiile paralele cu două drepte concurente date. Demonstrați că suma acestor vectori este nenulă, indiferent de direcțiile și sensurile lor.

3. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verifică relația $f(x+2) + f(x-2) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Demonstrați că:

a) Funcția f este periodică;

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{12} - \left\lfloor \frac{x}{12} \right\rfloor$, are proprietatea din enunț.

4. În triunghiul ABC, H este ortocentrul, O este centrul cercului circumscris, G este centrul de greutate și A_1 este punctul diametral opus lui A. Demonstrați că:

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$. b) $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA_1}$ c) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$

d) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HG}$ e) punctele H, G, O sunt coliniare și $2GO = HG$.

NOTA

Toate subiectele sunt obligatorii; fiecare subiect are 7 puncte; timp de lucru 3 ore.